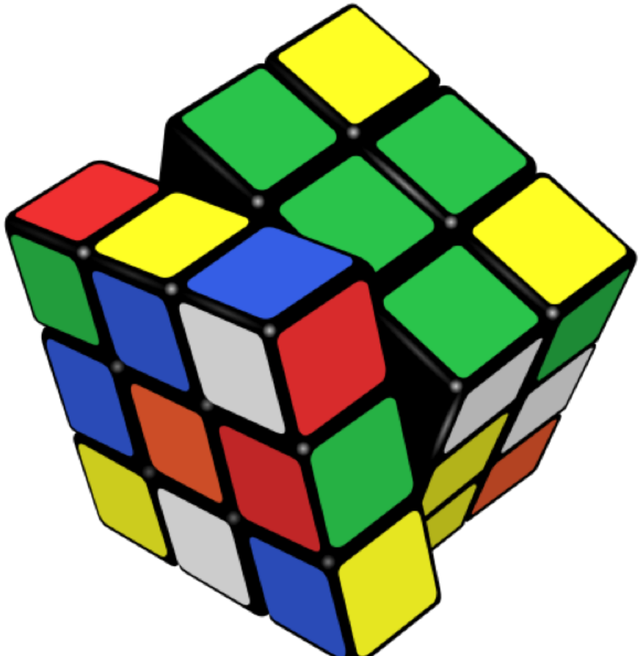
IL CALCOLO COMBINATORIO

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

43 252 003 274 489 856 000



Il **calcolo combinatorio** studia i modi per raggruppare e/o ordinare secondo date regole gli elementi di un insieme finito di oggetti.

Il **calcolo combinatorio** si interessa di contare tali modi, ovvero le configurazioni e risponde a domande quali: "Quanti sono...", "In quanti modi...", "Quante possibili combinazioni..." eccetera.

Problema: **abbiamo due paia di pantaloni e quattro magliette. In quanti modi diversi ci possiamo vestire?**

Soluzione

Indichiamo con P_1 e P_2 i due pantaloni, e con M_1, M_2, M_3, M_4 le quattro magliette e consideriamo i seguenti insiemi:

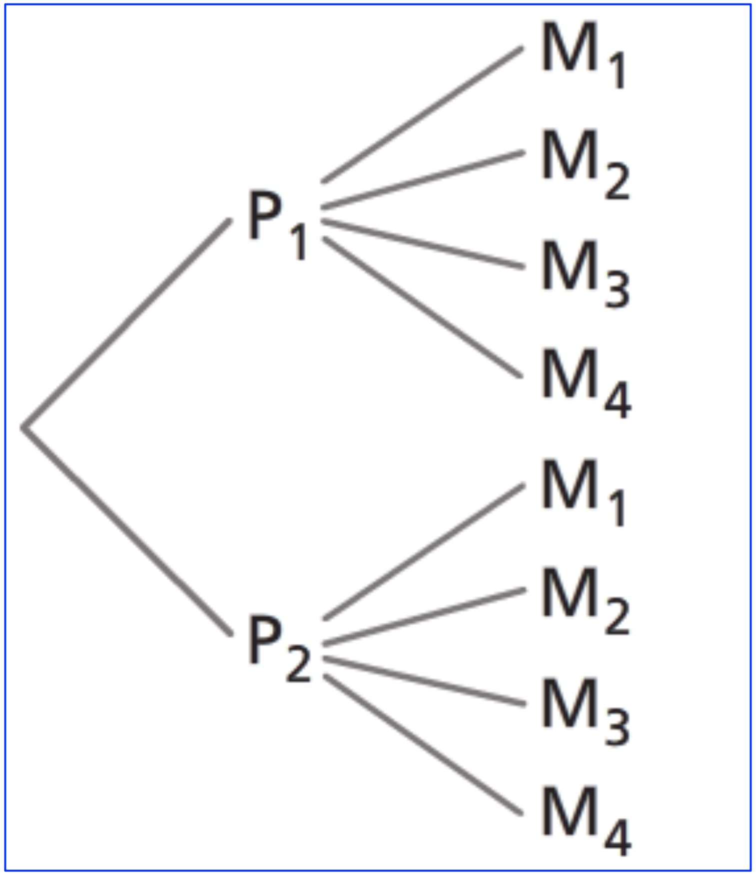
$$P = \{P_1; P_2\} \qquad M = \{M_1; M_2; M_3; M_4\}$$

e richiamiamo il seguente concetto:

il **prodotto cartesiano** AxB di due insiemi non vuoti A e B è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B.

L'insieme di tutte le possibili coppie non è altro che il prodotto cartesiano tra l'insieme P e l'insieme M:

$$PxM = \{(P_1;M_1),(P_1;M_2),(P_1;M_3),(P_1;M_4),(P_2;M_1),(P_2;M_2),(P_2;M_3),(P_2;M_4)\}$$



Il **diagramma ad albero** è un modo per determinare il numero di tutti i gruppi che è possibile formare: le 2 possibilità (rami dei pantaloni) indicano quante volte vengono ripetute le 4 possibilità (rami magliette):

$$totale\ \ gruppi = 2 \cdot 4 = 8$$

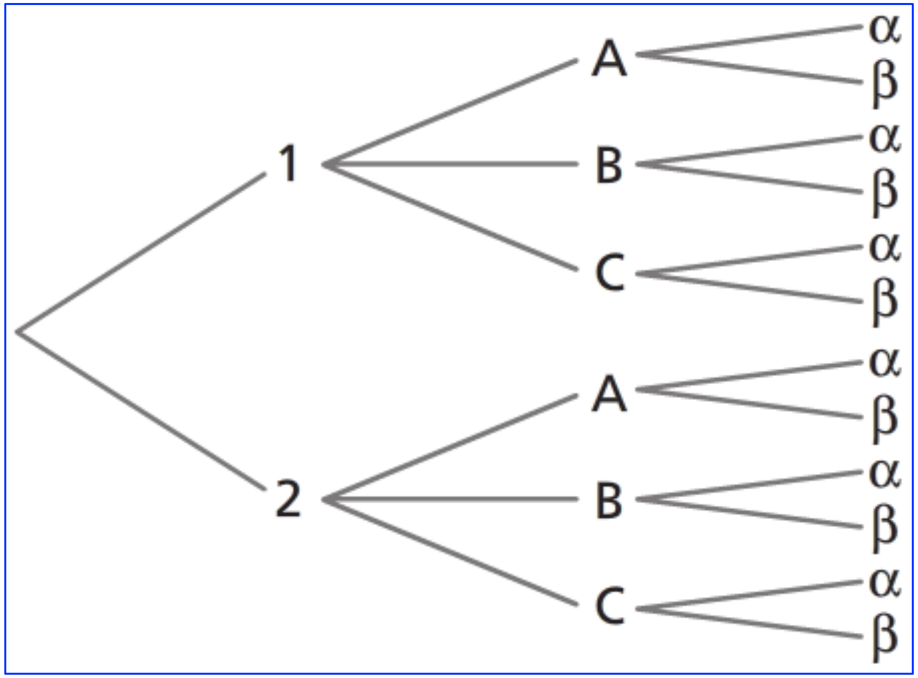
REGOLA

Per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando il primo posto a un elemento di un insieme A con "n elementi", il secondo a uno di un insieme B cn "m elementi", il terzo a uno di un insieme C con "k elementi", ecc..., occorre calcolare il seguente prodotto:

$$\boxed{totale\ \ gruppi = n \cdot m \cdot k \cdot \ldots}$$

esempio

Elencare tutte le sigle di tre elementi che possiamo scrivere utilizzando le cifre 1 e 2 per il primo posto, le lettere A,B,C per il secondo posto e le lettere greche α, β per l'ultimo posto. Calcolare quante sono.



2 sono le possibilità per la prima posizione (rami delle cifre); 3 possibilità per la seconda posizione (rami delle lettere); 2 possibilità per la terza posizione (rami lettere greche).

$$totale\ \ gruppi = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

ESERCIZIO GUIDA

Una mensa aziendale offre ai suoi dipendenti ogni giorno la possibilità di scegliere fra due primi, tre secondi e due dessert. Quanti sono i tipi di pasto che si possono costruire con i piatti offerti? Forniamo una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero.

Abbiamo nell'ordine le seguenti possibilità:

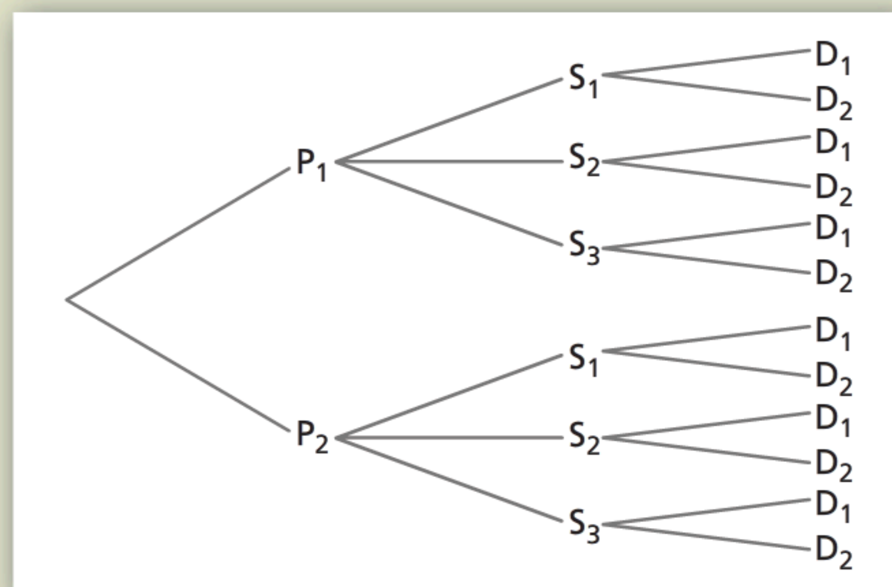
2 primi piatti,

3 secondi piatti,

2 dessert.

In totale abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ possibilità.

Il diagramma ad albero corrispondente è quello a fianco.



DISPOSIZIONI SEMPLICI

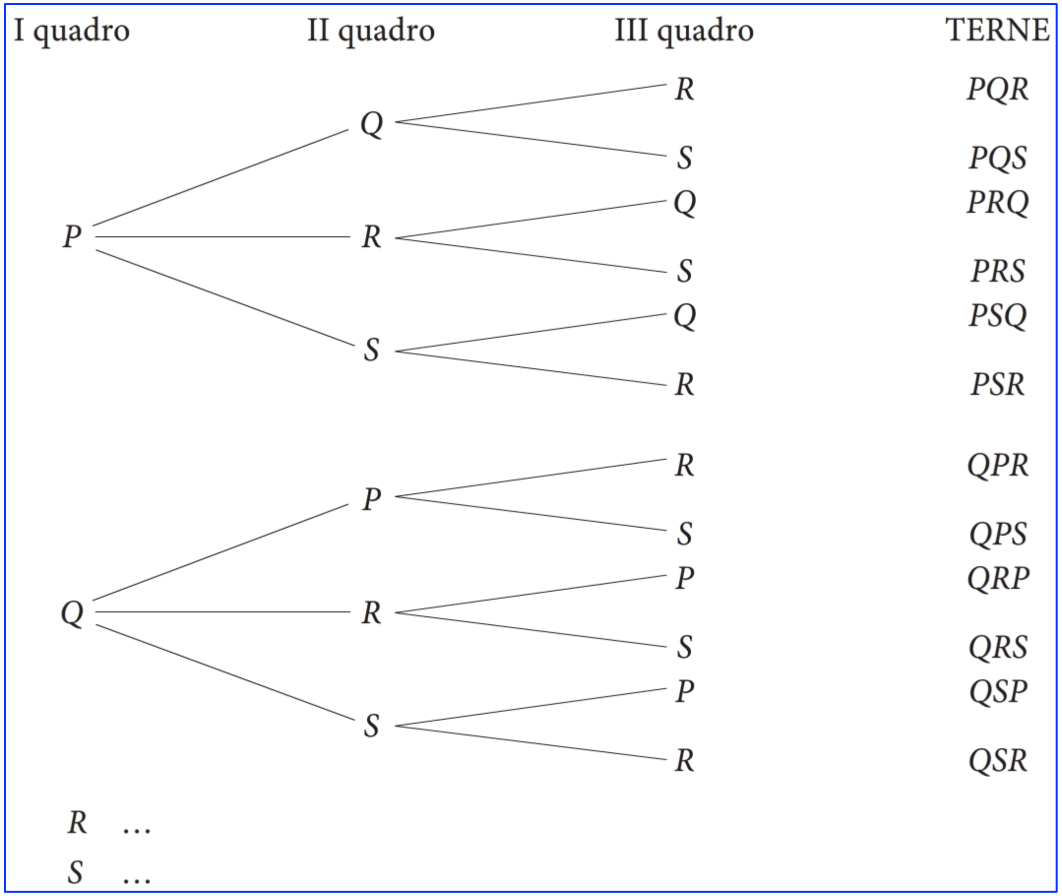
Problema: **si hanno 4 quadri, ma se ne possono appendere solo 3. E' importante anche l'ordine con cui i quadri vengono appesi (ragioni di colore e di luce). In quanti modi diversi si possono appendere?**

Soluzione

Indichiamo con A l'insieme costituito dai quattro quadri:

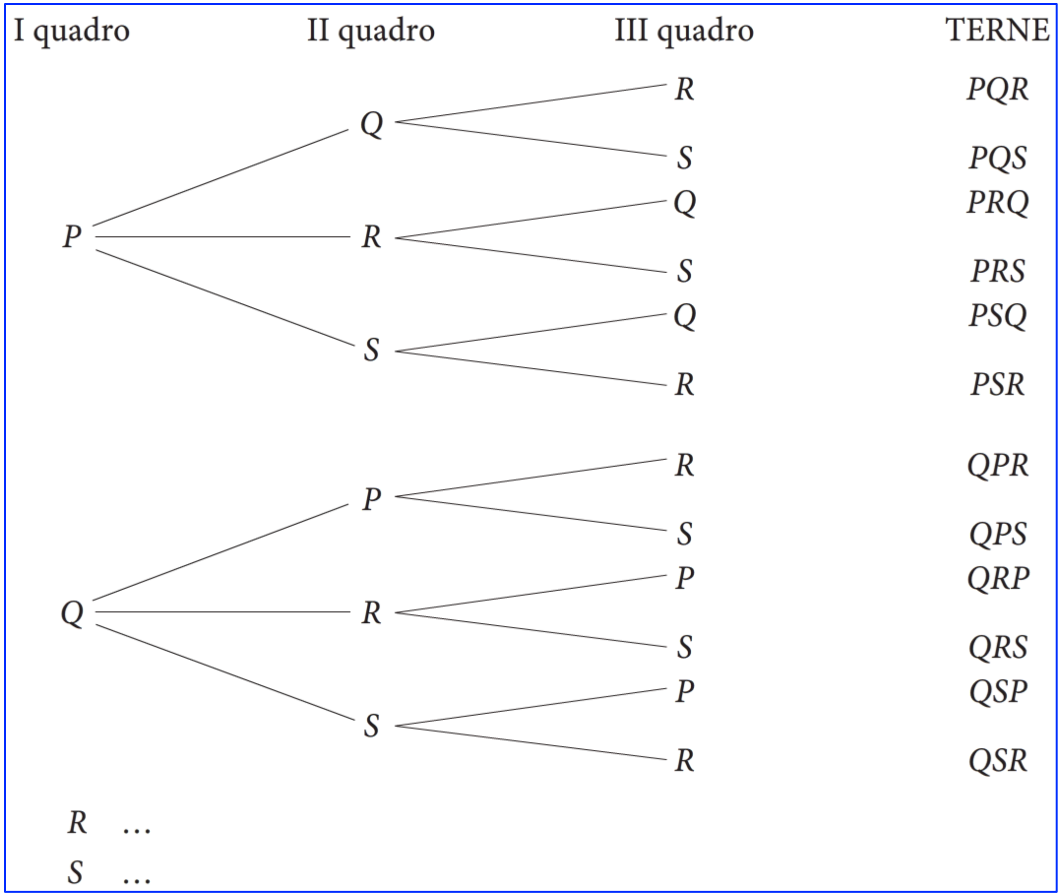
$$A = \{P; Q; R; S\}$$

Costruiamo dei diagrammi ad albero che mostrino tutte le possibili terne di quadri:



Raggruppamenti relativi a un solo insieme:

- Si appende il 1° quadro (P), per il 2° posto rimangono 4-1=3 quadri (Q,R,S);
- Si appende il 2° quadro (Q), per il 3° posto rimangono 4-2=2 quadri (R,S)
- Abbiamo ottenuto le terne: PQR e PQS.



Ogni terna si distingue dalle altre:

- per la diversità di almeno un elemento;
- oppure per l'ordine degli elementi

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **disposizioni semplici**.

Calcolo del numero di disposizioni semplici: per il primo posto ci sono 4 possibilità, per il secondo posto 3 possibilità e per il terzo posto 2 possibilità.

Complessivamente i gruppi sono:

$$\boxed{totale\ \ gruppi = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24}$$

Il valore trovato si indica come:

$$\boxed{D_{4,3} = 24}$$

e si legge: disposizioni semplici di 4 elementi di classe 3 (la classe indica il numero di elementi di cui è costituito il gruppo).

Generalizziamo il procedimento a "n oggetti distinti" e scriviamo la formula per determinare il "numero di raggruppamenti di classe k":

DEFINIZIONE

Le **disposizioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con k≤n) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono collocati:

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \quad con \ (n,k) \in N}$$

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

esempio

Se ad un torneo partecipano 15 squadre, quante sono le possibili classifiche delle prime cinque squadre?

Ci sono n=15 elementi distinti (squadre) e k=5 elementi per ogni raggruppamento (le prime cinque squadre).

Il numero delle possibili classifiche (disposizioni semplici) è:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$D_{15,5} = 15 \cdot (15-1) \cdot (15-2) \cdot (15-3) \cdot (15-4) =$$

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$$

esempio

Quanti numeri di 4 cifre, tutte diverse tra loro, si possono formare con le 10 cifre decimali?

Ci sono n=10 elementi distinti (le cifre decimali) e k=4 elementi per ogni raggruppamento (numeri di 4 cifre).

I numeri di 4 cifre, diversi tra loro, che si possono costruire sono:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

In questo numero ci sono disposizioni da eliminare, come quei numeri che iniziano con la cifra 0.

Infatti, questi numeri, non sono formati da 4 cifre ma da 3.

Prendiamo le 9 cifre diverse da zero e calcoliamo le disposizioni di classe 3:

$$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

In definitiva:

$$D_{10,4} - D_{9,3} = 5040 - 504 = 4536$$

ESERCIZIO GUIDA

Quanti numeri di tre cifre tutte diverse si possono costruire con gli elementi dell'insieme $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$? Quanti sono i numeri che cominciano con la cifra 8?

I gruppi che si possono formare sono:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

I gruppi di tre cifre tutte diverse che cominciano con la cifra 8 li otteniamo formando tutti i gruppi di classe 2 senza utilizzare questa cifra, e poi ponendo questa davanti a ognuno di essi:

$$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Oppure applichiamo il «metodo delle possibilità», tenendo conto che al primo posto abbiamo una sola possibilità data dalla cifra 8: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$.

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $(n-k) \cdot D_{n,k} = D_{n,k+1}$, $k < n$.

Applichiamo la formula delle disposizioni.

Primo membro:

$$(n-k) \cdot D_{n,k} = (n-k) \cdot [n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)] = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k).$$

Secondo membro:

$$D_{n,k+1} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(k+1)+1] = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k) =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k),$$

in quanto il termine precedente a $n-k$ è $n-k+1$.

Poiché i due membri, semplificati, sono uguali, l'uguaglianza è un'identità.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $3 \cdot D_{x,2} = 2 \cdot D_{x+1,2}$.

Determiniamo la condizione per l'incognita. Deve essere $x \in \mathbb{N}$ (escluso 0) e:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 1 \geq 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \geq 2.$$

Applichiamo la formula $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ e svolgiamo i calcoli.

$$3x(x-1) = 2(x+1)x \quad \rightarrow \quad x[3(x-1) - 2(x+1)] = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-5) = 0.$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto: $x = 0 \vee x = 5$.

Tenuto conto della condizione iniziale ($x \geq 2$), l'equazione iniziale ha per soluzione $x = 5$.

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

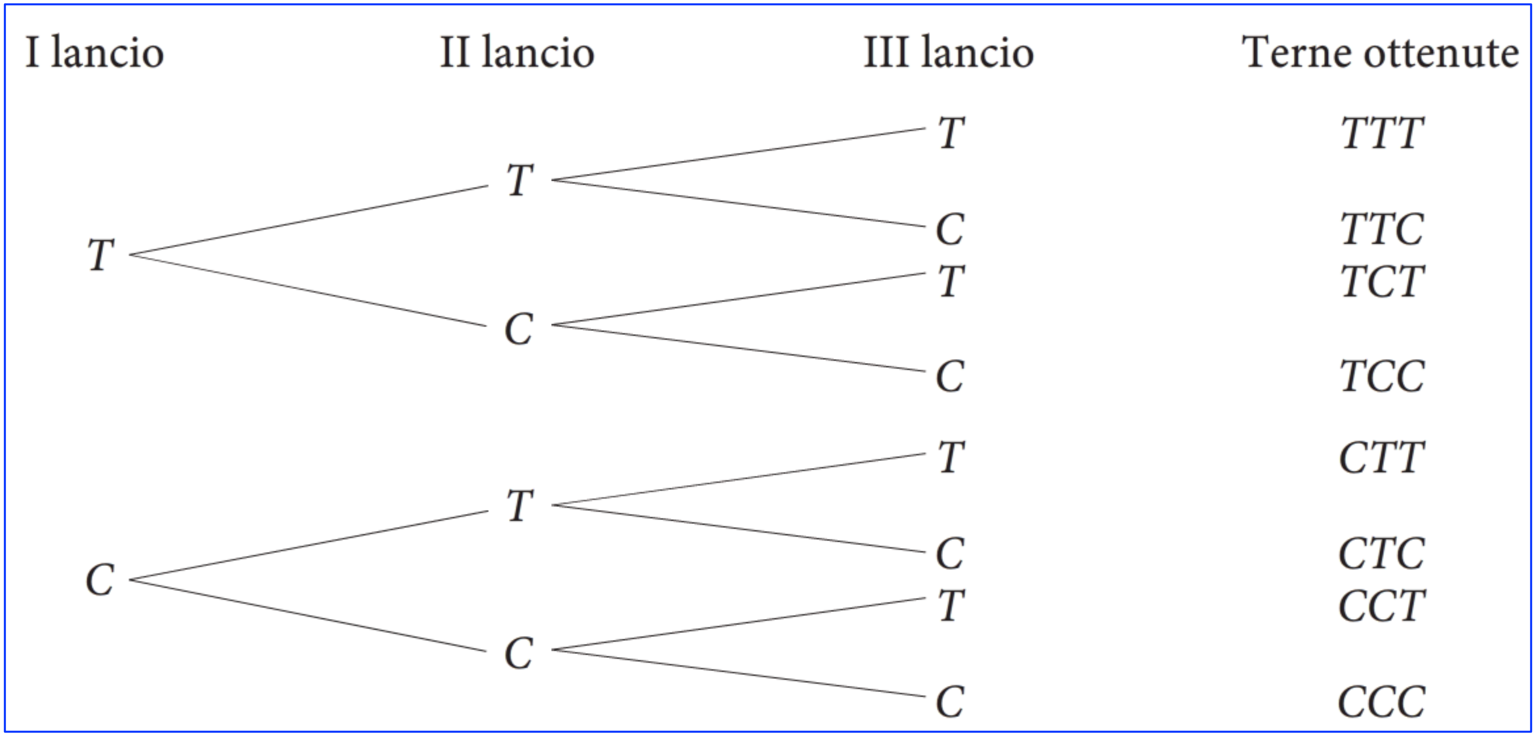
Problema: **lanciamo una moneta tre volte e determiniamo tutti i modi con cui si succedono le due facce.**

Soluzione

Indichiamo con A l'insieme costituito dai due possibili risultati del lancio:

$$A = \{T; C\}$$

Costruiamo dei diagrammi ad albero che mostrino le terne di tutti i possibili risultati:



I gruppi ottenuti (le terne) differiscono per l'ordine degli elementi contenuti, ma un elemento può comparire più di una volta nello stesso gruppo.

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **disposizioni con ripetizione**. La classe k può essere maggiore del numero di elementi n a disposizione.

Calcolo del numero di disposizioni con ripetizione: per il primo posto ci sono 2 possibilità, per il secondo posto 2 possibilità e per il terzo posto 2 possibilità.

Complessivamente i gruppi sono:

$$\boxed{totale\ \ gruppi = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8}$$

Il valore trovato si indica come:

$$\boxed{D'_{2,3} = 8}$$

e si legge: disposizioni con ripetizione di 2 elementi di classe 3 (la classe indica il numero di elementi di cui è costituito il gruppo).

Generalizziamo il procedimento a “n oggetti distinti” e scriviamo la formula per determinare il “numero di raggruppamenti di classe k”:

DEFINIZIONE

Le **disposizioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con k≤n oppure k≥n) sono tutti i gruppi di k elementi, anche ripetuti, scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento o per il loro ordine:

$$D'_{n,k} = n^k \quad con\ (n,k) \in N$$

esempio

Quante sono le possibili sigle con cui può iniziare la targa delle automobili italiane?

Ci sono n=26 elementi distinti (le lettere dell’alfabeto inglese) e k=2 elementi per ogni raggruppamento (le sigle, anche ripetute, delle targhe)

Le possibili sigle sono:

$$D'_{26,2} = 26^2 = 676$$

esempio

Quante sigle di 5 elementi, anche non distinti, si possono formare, tali che i primi due posti siano indicati da due cifre e gli ultimi 3 da lettere dell'alfabeto italiano?

Per i primi due posti abbiamo:

$$D'_{10,2} = 10^2 = 100$$

Per gli ultimi tre posti abbiamo:

$$D'_{21,3} = 21^3 = 9261$$

A ogni disposizione con ripetizione di due cifre accompagniamo una disposizione con ripetizione di tre lettere:

$$D'_{10,2} \cdot D'_{21,3} = 100 \cdot 9261 = 926100$$

ESERCIZIO GUIDA

Si lanciano due dadi, uno dopo l'altro. Quanti sono i casi possibili? Quanti sono i casi in cui entrambe le facce presentano numeri pari?

Rispondiamo alla prima domanda. In ogni dado ci sono 6 numeri e in un lancio lo stesso numero si può presentare in entrambi i dadi. Abbiamo quindi delle disposizioni con ripetizione e dobbiamo applicare la formula $D'_{n,k} = n^k$, dove $n = 6$ e $k = 2$. Tutti i casi che si possono presentare sono:

$$D'_{6,2} = 6^2 = 36.$$

Per la seconda domanda, abbiamo $n = 3$ e $k = 2$. I casi in cui le due facce sono entrambe pari sono:

$$D'_{3,2} = 3^2 = 9.$$

PERMUTAZIONI SEMPLICI

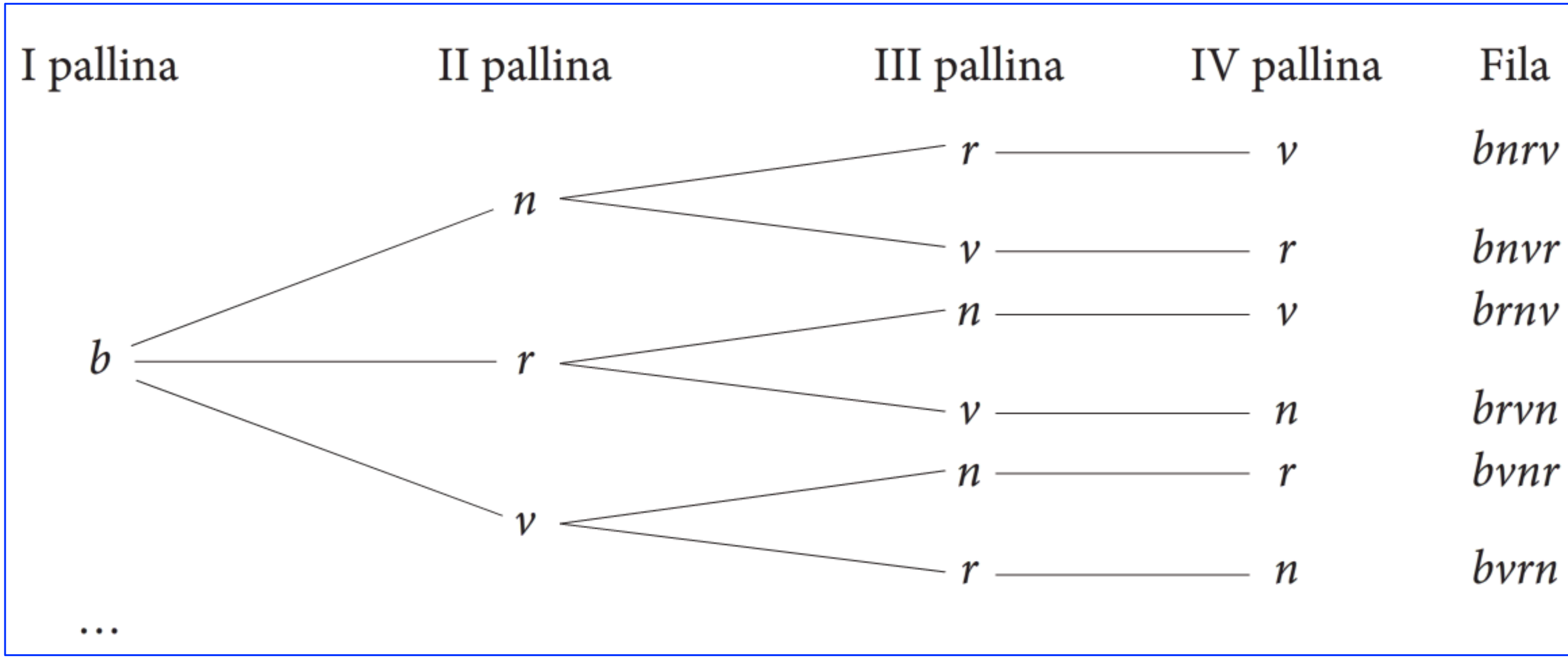
Problema: **calcolare in quanti modi diversi è possibile mettere in fila 4 palline di diverso colore.**

Soluzione

Indichiamo con A l'insieme costituito dai 4 colori:

$$A = \{b, n, r, v\}$$

Costruiamo con i diagrammi ad albero tutti i possibili raggruppamenti:



Per la pallina bianca si ottengono 6 raggruppamenti. Pertanto, il totale dei gruppi è:

$$totale\ \ gruppi = 6 \cdot 4 = 24$$

Ogni gruppo contiene tutti gli elementi dell'insieme e differisce dagli altri solo per l'ordine.

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **permutazioni semplici**. Le permutazioni semplici sono delle disposizioni semplici di n elementi e di classe k=n. Quindi, per calcolare il numero delle permutazioni basta sostituire nella formula delle disposizioni semplici k=n.

Il valore trovato si indica come:

$$\boxed{P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24}$$

e si legge: permutazioni semplici di 4 elementi.

In generale diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE

Le **permutazioni semplici** di n elementi distinti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per il loro ordine:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad con\ n \geq 2$$

esempio

Calcolare il numero di anagrammi che si possono ottenere con le lettere della parola CANTO.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo in quanti modi si possono mettere in fila tre bambini e quattro bambine nel caso in cui non importi l'ordine e nel caso in cui prima vi siano tutte le femmine e poi tutti i maschi.

Se non importa l'ordine, non c'è distinzione fra bambini e bambine: dobbiamo considerare le permutazioni di 7 elementi:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Nel caso in cui il gruppo delle femmine preceda quello dei maschi dobbiamo considerare che a ogni permutazione semplice del primo gruppo si associa una permutazione semplice del secondo gruppo. Il numero delle possibilità è:

$$P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144.$$

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $P_n = n \cdot D_{n-1,n-2}$.

Sostituiamo ai simboli le espressioni relative utilizzando $P_n = n!$ e per le disposizioni la formula

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Primo membro: $P_n = n!$.

Secondo membro:

$$n \cdot D_{n-1,n-2} = n \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-1-n+2+1)] = n \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2] = n!.$$

Entrambi i membri sono uguali a $n!$, quindi l'identità è verificata.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $P_{x+1} = 6 \cdot P_{x-1}$.

Poniamo la condizione di esistenza dei due membri dell'equazione:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 1 \text{ e } x \in \mathbb{N}.$$

Esprimiamo i simboli, utilizzando la formula $P_x = x!$:

$$P_{x+1} = (x+1)!,$$

$$P_{x-1} = (x-1)!.$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza e sviluppiamo i calcoli:

$$(x+1)! = 6 \cdot (x-1)! \quad \rightarrow \quad (x+1) \cdot x \cdot (x-1)! = 6 \cdot (x-1)!.$$

$(x-1)! \neq 0$, quindi dividiamo entrambi i membri per $(x-1)!$, ottenendo:

$$(x+1) \cdot x = 6 \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3 \vee x = 2.$$

Solo $x = 2$ è accettabile, data la condizione di esistenza $x \geq 1$.

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Problema: **calcolare quanti anagrammi si possono formare con le lettere della parola TETTO**

Soluzione

Poiché la lettera T è ripetuta più volte (3), ci saranno degli anagrammi (per esempio EOTTT) ripetuti, ossia indistinguibili.

Se consideriamo le $P_5=5!=120$ permutazioni di 5 lettere, troviamo ogni raggruppamento ripetuto 6 volte.

Quindi, il numero degli anagrammi è:

$$\boxed{numero\ \ anagrammi = 120 : 6 = 20}$$

Il valore trovato si indica come:

$$\boxed{P_5^{(3)} = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20}$$

e si legge: permutazioni di 5 elementi di cui 3 ripetuti.

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **permutazioni con ripetizione**.

In generale, con n elementi di cui k ripetuti, la formula diventa:

$$\boxed{P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}}$$

Se nell'insieme di n elementi ci sono k,h,…,r elementi che si ripetono, allora:

DEFINIZIONE

Le **permutazioni con ripetizione** di n elementi, di cui h,k,…,r elementi ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'ordine in cui si presentano gli elementi distinti e la posizione che occupano gli elementi ripetuti:

$$P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h!\cdot k!\cdot \ldots}$$

esempio

Calcolare il numero dei modi in cui 5 sedie possono essere occupate da 3 persone.

E' una permutazione di 5 elementi (sedie) e 2 ripetuti (sedie vuote):

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$$

ESERCIZIO GUIDA

Abbiamo dieci palline di cui cinque nere, tre rosse, due gialle. Calcoliamo:

a) in quanti modi si possono disporre in fila;

b) quante sono le file nelle quali le palline gialle occupano i primi due posti;

c) in quanti modi si possono disporre in maniera che le palline di uno stesso colore siano tutte vicine.

---

a) Sono le permutazioni di 10 oggetti con 5, 3 e 2 oggetti ripetuti:

$$P_{10}^{(5,3,2)} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = 2520.$$

b) Sono tutte le permutazioni di 8 oggetti con 5 e 3 oggetti ripetuti che si accostano alle due palline gialle che occupano i primi due posti:

$$P_{8}^{(5,3)} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{40\,320}{120 \cdot 6} = 56.$$

c) Sono tutte le permutazioni semplici che possiamo fare con i gruppi dei tre colori:

$$P_3 = 3! = 6.$$

DEFINIZIONE

Si definisce la **funzione fattoriale** come:

$$0!$$

$$1!$$

$$.$$

$$.$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad con \ n \geq 2$$

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$$

La relazione precedente può essere scritta anche come:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1)! \Leftrightarrow (n+1)! = (n+1) \cdot n!}$$

Ciò suggerisce una **definizione ricorsiva di n!**:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Vale anche la seguente relazione:

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!$$

Utilizzando la funzione fattoriale, le disposizioni semplici assumono la forma:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $2n! + (n + 1)! = (n + 3) \cdot n!$.

Primo membro:
utilizzando la relazione $n! = n \cdot (n - 1)!$ e raccogliendo poi $n!$, otteniamo

$$2n! + (n + 1)! = 2n! + (n + 1) \cdot n! = (2 + n + 1) \cdot n! = (n + 3) \cdot n!.$$

Essendo il primo membro uguale al secondo, l'identità è verificata.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $10(x-1)! = 5x!$.

Oltre ad appartenere all'insieme dei numeri naturali, x deve soddisfare la condizione:

$$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1, \text{ con } x \in \mathbb{N}.$$

Utilizzando la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$, dall'equazione iniziale otteniamo:

$$10(x-1)! = 5x(x-1).$$

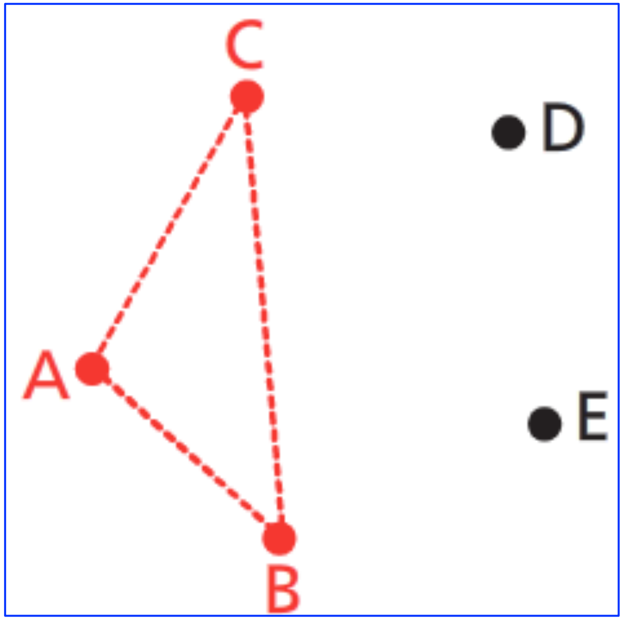
Poiché $(x-1)! \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri per $(x-1)!$, ottenendo:

$$10 = 5x \quad \rightarrow \quad 10 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

La soluzione è accettabile perché verifica la condizione iniziale ($x \geq 1$).

COMBINAZIONI SEMPLICI

Problema: **dati 5 punti nel piano, a 3 a 3 non allineati, calcolare quanti triangoli si possono costruire congiungendo 3 punti.**



Soluzione

Se indichiamo con A,B,C,D,E i punti nel piano, il triangolo ABC, per esempio, può essere individuato dalle seguenti terne di punti:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Nel contare i triangoli queste terne vanno prese una sola volta.

I gruppi ottenuti (le terne) differiscono solo per gli elementi contenuti e non per il loro ordine.

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **combinazioni semplici** di n elementi (nel nostro caso n=5) di classe k (nel nostro caso k=3), e si indicano con $C_{n,k}$ (nostro esempio $C_{5,3}$ e si legge: combinazioni di 5 elementi di classe 3).

Calcolo di $C_{5,3}$. Partiamo da tutte le terne possibili (ossia le disposizioni semplici $D_{5,3}$) e osserviamo che le permutazioni P_3 di ognuno dei gruppi di tre lettere non devono essere pensate distinte. Quindi:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

In generale:

DEFINIZIONE

Le **combinazioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con k≤n) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \qquad con\ (n,k) \in N$$

esempio

Calcolare il numero di terni che si possono fare al gioco del lotto.

I raggruppamenti sono tutte le terne di numeri, indipendentemente dall'ordine con cui vengono estratti, che si possono formare con i 90 numeri del lotto:

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117480$$

Altre forme:

Legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Legge delle classi complementari

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

esempio

Si hanno 5 macchine e 2 piloti. In quanti modi le macchine possono essere assegnate ai piloti?

L'insieme di partenza è formato dalle 5 macchine:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Poiché i piloti sono due, i gruppi sono tutte le coppie che si possono formare con le cinque macchine. L'ordine non conta, quindi tali gruppi sono combinazioni, il cui numero è:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$$

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene nove palline numerate di cui sei rosse e tre bianche. Si estraggono contemporaneamente cinque palline. Calcoliamo:
a) quanti gruppi diversi di cinque palline si possono avere;
b) quanti di cinque palline tutte rosse;
c) quanti di quattro rosse e una bianca;
d) quanti di tre rosse e due bianche;
e) quanti di due rosse e tre bianche.

a) Poiché non interessa l'ordine, dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le nove palline prese cinque alla volta:

$$C_{9,5} = \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

b) Dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le sei palline rosse prese cinque alla volta:

$$C_{6,5} = \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6.$$

c), d), e) Otteniamo il numero di tutti i gruppi di $k = 4, 3, 2$ palline rosse e $(5 - k) = 1, 2, 3$ palline bianche con il prodotto delle singole combinazioni relative a ciascun colore:

$$\text{c) } C_{6,4} \cdot C_{3,1} = \binom{6}{4} \cdot \binom{3}{1} = \binom{6}{2}\binom{3}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 3 = 45;$$

$$\text{d) } C_{6,3} \cdot C_{3,2} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 3 = 60;$$

$$\text{e) } C_{6,2} \cdot C_{3,3} = \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{3} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 1 = 15.$$

Osservazione. Il numero totale dei raggruppamenti di tipo b), c), d) ed e) è 126, ossia è uguale al numero delle combinazioni di nove palline prese cinque alla volta, tipo a). Questo perché non ci sono ulteriori possibilità per le combinazioni dei colori.

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Problema: **lanciamo consecutivamente una moneta e calcoliamo il numero delle combinazioni possibili. Non ci interesseremo dell'ordine di uscita ma solo della composizione di ogni possibile gruppo.**

Soluzione

- Se i lanci sono 2, il numero delle possibilità sono 3:

k=2 TT, TC, CC

- Se i lanci sono 3, il numero delle possibilità sono 4:

k=3 TTT, TTC, TCC, CCC

- Se i lanci sono 4, il numero delle possibilità sono 5:

k=4 TTTT, TTTC, TTCC, TCCC, CCCC

In ogni gruppo un elemento può ripetersi fino a k volte e, non interessando l'ordine, ogni gruppo contiene gli stessi elementi, ma con un numero di ripetizioni diverso in ciascun gruppo distinto.

I gruppi con queste caratteristiche si chiamano **combinazioni con ripetizione**, e si usa la seguente notazione:

n=2, k=2 $C'_{2,2}=3$

n=2, k=3 $C'_{2,3}=4$

n=2, k=4 $C'_{2,4}=4$

DEFINIZIONE

Le **combinazioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con k≤n o k≥n) sono tutti i gruppi di k elementi che si possono formare, nei quali:

a) ogni elemento può essere ripetuto al massimo fino a k volte; b) non interessa l'ordine con cui gli elementi si presentano; c) è diverso il numero di volte col quale un elemento compare:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k!} \qquad con\ (n,k)\in N$$

esempio

Calcolare in quanti modi diversi possiamo distribuire sei oggetti identici (per esempio 6 palline rosse) in quattro scatole.

Se indichiamo con a,b,c,d, le quattro scatole, alcune possibili distribuzioni sono:

aaabcd, aaaaaa, abbcdd, bbbccd

Osserviamo che tutte le modalità sono le combinazioni con ripetizione di 4 oggetti di classe 6. Notiamo che alcune scatole possono rimanere vuote:

$$C'_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$$

ESERCIZIO GUIDA

Lanciando contemporaneamente quattro dadi uguali, quante sono le combinazioni con cui si possono presentare le sei facce?

Scriviamo alcune combinazioni:

1	1	1	2
2	1	2	2
3	3	6	6
3	4	5	6
…			

Ogni gruppo si distingue dagli altri per i numeri contenuti e per il diverso numero di volte col quale compare lo stesso numero (al massimo quattro volte):

$$C'_{6,4} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

COEFFICIENTI BINOMIALI

Il seguente simbolo si chiama **coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{k}$$

Applicando la legge dei tre fattoriali e delle classi complementari, si ottiene:

$$\binom{n}{k}=1 \qquad \binom{0}{0}=1 \qquad \binom{n}{n}=1$$

In particolare:

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$$

Questa **formula di ricorrenza** è utile quando conosciamo il valore del coefficiente binomiale per un certo valore di k e dobbiamo trovare i valori delle classi successive (o precedenti).

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $\dfrac{n+1}{k} \cdot \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.

Sostituiamo utilizzando la legge dei tre fattoriali $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Primo membro:

$$\frac{n+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} =$$

Essendo $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ e $k(k-1)! = k!$:

$$= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!}.$$

Secondo membro:

$$\frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!}.$$

Poiché per entrambi i membri abbiamo ottenuto la stessa espressione, l'identità è verificata.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $6 \cdot \binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x-2} = 2 \cdot \binom{x}{x-4}$

Osserviamo che le condizioni $x \geq x - 2$, $x + 1 \geq x - 2$, $x \geq x - 4$ sono sempre verificate. Quindi le condizioni per l'incognita da considerare sono:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 2 \\ x \geq 4 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 4, \text{ con } x \in \mathbb{N}.$$

Applichiamo ai coefficienti binomiali la legge delle classi complementari $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

$$\binom{x}{x-2} = \binom{x}{x-x+2} = \binom{x}{2}, \binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{x+1-x+2} = \binom{x+1}{3},$$

$$\binom{x}{x-4} = \binom{x}{x-x+4} = \binom{x}{4}.$$

Quindi:

$$6 \cdot \binom{x}{2} - \binom{x+1}{3} = 2 \cdot \binom{x}{4}.$$

Utilizziamo la formula $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$:

$$6\,\frac{x(x-1)}{2!} - \frac{(x+1)x(x-1)}{3!} = 2\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

Calcoliamo i fattoriali a denominatore:

$$6\,\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x(x-1)}{6} = 2\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$3x(x-1) - \frac{x(x+1)(x-1)}{6} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{12}.$$

Moltiplichiamo per 12 entrambi i membri dell'equazione e raccogliamo $x(x-1)$:

$$x(x-1)[36 - 2(x+1) - (x-2)(x-3)] = 0$$

$$x(x-1)(36 - 2x - 2 - x^2 + 5x - 6) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-1)(-x^2 + 3x + 28) = 0.$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto e otteniamo le soluzioni:

$$x = 0, x = 1, x = -4, x = 7.$$

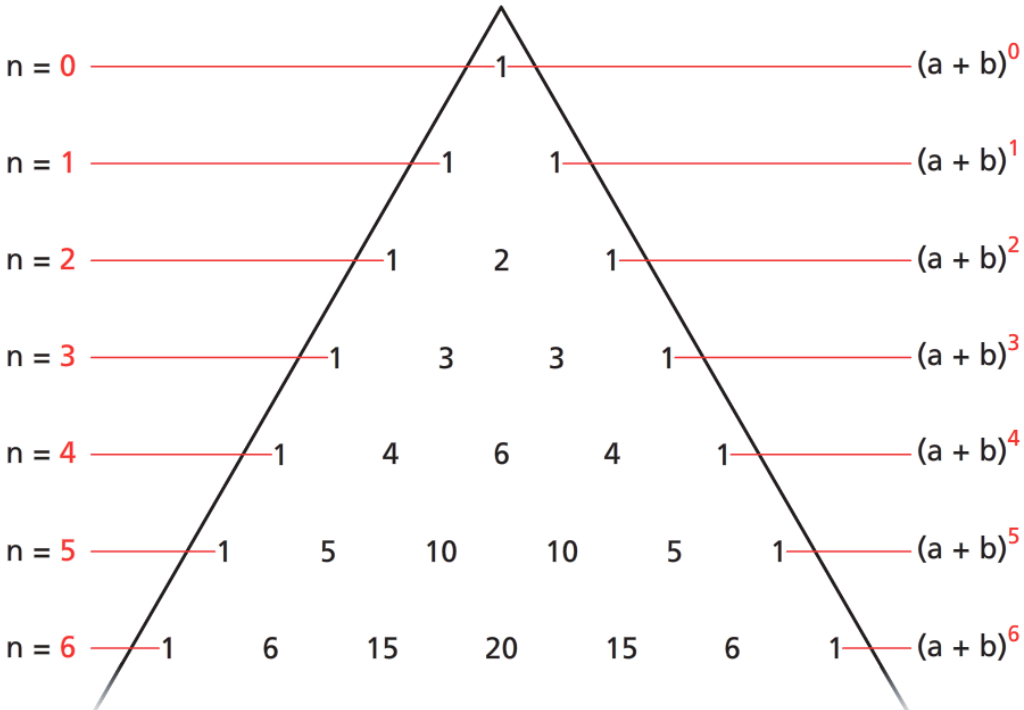
Solo $x = 7$ è accettabile, data la condizione iniziale $x \geq 4$.

esempio

Se sappiamo che: $\binom{32}{15} = 565722720$

allora: $\binom{32}{16} = 565722720 \cdot \frac{32-15}{15+1} = 601080390$

Usiamo i coefficienti binomiali per calcolare la potenza di un binomio.

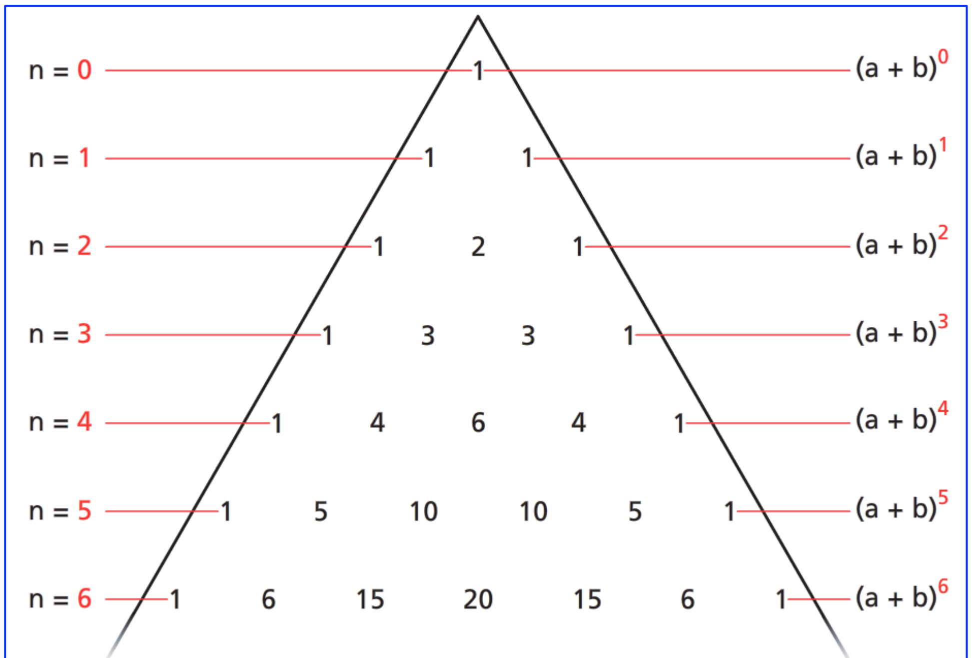


Triangolo di Tartaglia

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$



$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2$$

$$+ \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6 =$$

$$a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo lo sviluppo della potenza: $(x^2 - 2y)^4$.

Applichiamo la formula $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$:

$$(x^2 - 2y)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1(-2y)^3 +$$

$$+\binom{4}{4}(x^2)^0(-2y)^4 = x^8 - 8x^6y + 24x^4y^2 - 32x^2y^3 + 16y^4.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il quarto termine dello sviluppo di $(x + 2)^{10}$.

Data la formula $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, consideriamo soltanto il termine generale $\binom{n}{k} A^{n-k} B^k$; poiché per $k = 0$ si ha il primo termine, il quarto termine si ha per $k = 3$. Essendo $n = 10$, otteniamo:

$$\binom{10}{3} \cdot x^7 \cdot 2^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} x^7 \cdot 8 = 120x^7 \cdot 8 = 960x^7.$$